Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Polynomgleichungen**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2) *Mitternachtsformel*
Seien $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig.
Beweisen Sie folgende allgemeine Lösungsformel (insofern eine Lösung existent, also $b^2 \geq 4ac$) für quadratische Polynomgleichungen in den reellen Zahlen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Aufgabe 2 (3) *Polynomdivision*
Zeigen Sie, dass für jedes reelle Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ gilt:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : p(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists q \in \mathbb{R}[x] : p(x) = (x - x_0)q(x)$$

Aufgabe 3 (1) *Nullstellen reeller Polynome*
Ermitteln Sie alle reellen Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

b) $f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$

c) $f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 51x - 54$

d) $f_4(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

e) $f_5(x) = x^4 - 4x^2 + 16$

f) $f_6(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

Aufgabe 4 (3) *Die Formel von Cardano*
In dieser Aufgabe sollen Sie die Formel von Cardrano zur allgemeinen Lösung von Polynomgleichungen dritten Grades herleiten. Gehen Sie dazu wiefolgt vor:

i) Zeigen Sie zunächst, dass man allgemein Polynomgleichungen dritten Grades ($a \neq 0, b, c, d \in \mathbb{R}$):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in die sogenannte *reduzierte Form* überführen kann

$$z^3 + pz + q = 0$$

mit reellen Zahlen $p, q \in \mathbb{R}$ und einer Substitution $x + \alpha = z(x) =: z$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

ii) Um nun diese Gleichung zu lösen wählt man allgemein den Ansatz

$$z = u + v.$$

Zeigen Sie, dass sich für u und v die Gleichungen

$$p = -3uv \qquad q = -(u^3 + v^3)$$

ergeben.
Tipp: Schauen Sie sich z^3 an un vergleichen Sie es mit der Ursprungsgleichung.

iii) Lösen Sie nun obiges Gleichungssystem

$$p = -3uv \qquad q = -(u^3 + v^3).$$

Tipp: Multiplizieren Sie die rechte Gleichung mit u^3.

Damit erhalten Sie die Lösungen für z und damit auch für x in der Ursprungsgleichung.

Aufgabe 5 (2) *Anwendung Cardano*
Betrachten Sie die Gleichung:

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$$

i) Sei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$.
Berechnen Sie $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$ und $f(2)$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Wie viele reelle Lösungen hat (1)?

Im Folgenden berechnen Sie die Nullstellen dieser Polynomfunktion.

ii) Bringen Sie f in die reduzierte Form (vgl. Aufgabe vorher "Formel von Cardano").

iii) Finden mit der Cardanischen Formel eine Lösung der reduzierten Form. Ihre Lösung sollte den Ausdruck $\sqrt[3]{1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}}$ enthalten.

iv) Vereinfachen Sie ihr Ergebnis aus iii). Welcher Lösung x von (1) entspricht diese Lösung?
Tipp: $\left(-1 + \sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3 = 1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}$

v) Bestimmen Sie nun die restlichen Nullstellen von f.